



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a V-a

Barem de evaluare și notare.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

1. Ana cumpără 7 cărți, 3 caiete și 2 pixuri pentru care plătește 175 lei. Mihai cumpără 9 cărți și 5 pixuri și plătește 230 lei. George cumpără 8 caiete și 10 pixuri și plătește 140 lei. Toți cumpără același tip de cărți, caiete, respectiv pixuri. Cărțile au același preț, caietele la fel, iar pixurile sunt identice.

a) Aflați cât costă în total o carte, un caiet și un pix.

b) Aflați cât costă o carte.

Soluție:

a) 7 cărți. . . . 3 caiete. . . . 2 pixuri. . . . 175 lei · 5 35 cărți. . . . 15 caiete. . . . 10 pixuri. . . . 875 lei	1p
8 caiete 10 pixuri 140 lei Deci 35 cărți 7 caiete 735 lei : 7 ⇒ 5 cărți 1 caiet 105 lei	2p
Dar, 7 cărți. . . . 3 caiete. . . . 2 pixuri. . . . 175 lei ⇒ 2 cărți. . . . 2 caiete. . . . 2 pixuri. 70 lei : 2 ⇒ o carte, un caiet și un pix vor costa în total 35 lei	2p
b) 3 cărți. . . . 3 caiete. . . . 3 pixuri. . . . 105 lei 7 cărți 3 caiete. . . . 2 pixuri. . . . 175 lei ⇒ 4 cărți costă cât un pix și 70 de lei	1p
29 de cărți costă 230+350 de lei ⇒ o carte costă 20 de lei	1p

2. Se împarte 2024 la un număr natural nenul și se obține un cât diferit de zero.

a) Arătați că există o astfel de împărțire pentru care câtul este egal cu restul;

b) Determinați cel mai mare rest posibil.

Soluție:

a) $2024 = n \cdot c + r$. Cum $c = r$ un exemplu posibil este $2024 = 1011 \cdot 2 + 2$	3p
b) $2024 = n \cdot c + r$. Din condiția $r < n$, cel mai mare rest posibil se obține pentru $r = n - 1$	2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



De unde $2025 = n \cdot (c + 1)$ iar n este cel mai mare posibil dacă c este cel mai mic posibil. Pentru $c = 1$ relația anterioară este imposibilă deci luăm în considerare $r = n - 2$ și atunci $2026 = n(c + 1)$ de unde $c = 1$ și $r = 1013$.

3. a) Arătați că $3 \cdot 128^{172} + 135 \cdot 81^{505} + 98 \cdot 7^{2021} < 10^{2024}$.

(SGM 11/2023)

b) Arătați că nu există numere naturale x și y pentru care $x^4 + y^4 = 2023$.

(SGM 10/2023)

Soluție:

a) $A = 3 \cdot 128^{172} + 135 \cdot 81^{505} + 98 \cdot 7^{2021} = 3 \cdot (2^7)^{289} + 5 \cdot 3^3 \cdot (3^4)^{505} + 2 \cdot 7^2 \cdot 7^{2021} = 3 \cdot 2^{2023} + 5 \cdot 3^{2023} + 2 \cdot 7^{2023}$	2p
$A < 3 \cdot 10^{2023} + 5 \cdot 10^{2023} + 2 \cdot 10^{2023} = 10^{2024}$	2p
b) $U(x^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}, U(x^4) \in \{0, 1, 5, 6, \}$	1p
$U(x^4 + y^4) \in \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}$	1p
Finalizare	1p

4. Fiecare dintre numerele naturale $1, 2, 3, \dots, 2023, 2024$ se împarte cu rest la numărul 1011.

Demonstrați că suma tuturor resturilor obținute este un număr divizibil cu 3.

Soluție:

Suma resturilor posibile este:	3p
$(1 + 2 + \dots + 1010) + (0 + 1 + \dots + 1010) + (0 + 1 + 2)$	
Se obține astfel $1010 \cdot 1011 + 3 = 1021113$	2p
Suma resturilor este divizibilă cu 3	2p